




心理统计

第十二讲：二因素ANOVA

严超赣
Chao-Gan Yan, Ph.D.
yancg@psych.ac.cn
http://rfmri.org/yan

Institute of Psychology, Chinese Academy of Sciences

1

二因素ANOVA的研究情境

- 一位研究者感兴趣影响儿童阅读能力的因素。研究者认为儿童的年龄和每次阅读时间可能是重要的影响因素。研究者设计了以下实验：选取两个年龄组的儿童：3岁和14岁。将每个年龄组的儿童随机分配到两个阅读条件。组1阅读时间为5分钟；组2为30分钟。两个星期之后测试了这些儿童的阅读能力。

2

2 X 2 因素设计

		阅读时间	
		5分钟	30分钟
年龄	3岁		
	14岁		

3

复杂设计的统计分析

- 2 x 2 的因素设计
 - 因素1的主效应
 - 因素2的主效应
 - 因素1和因素2的交互作用
- 上述三个检验是彼此独立的

4

一个因素设计的例子

- 自变量1：晨型和夜型
- 自变量2：喝咖啡的杯数（多，少）
- 因变量：考试分数

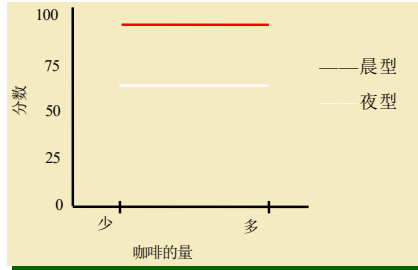
5

因素A的主效应

		少	多
		晨型	90
夜型	60	60	

6

因素A的主效应



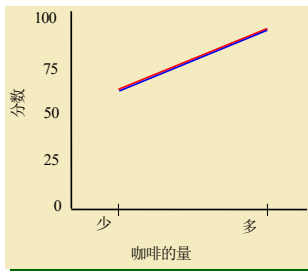
7

因素B的主效应

		咖啡的量	
		少	多
被试的类型	早晨型	60	90
	夜间型	60	90

8

因素B的主效应



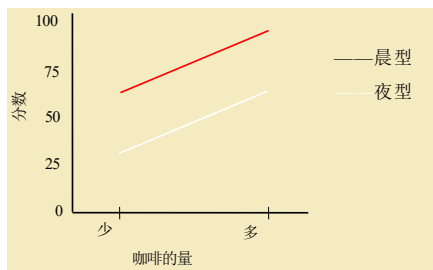
9

因素A和因素B的主效应

		咖啡的量	
		少	多
被试类型	晨型	60	90
	夜型	30	60

10

因素A和因素B的主效应



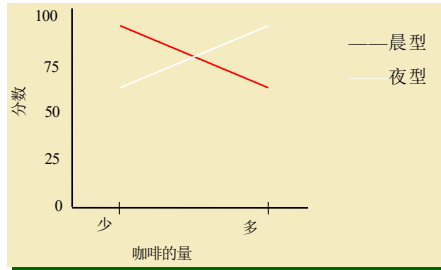
11

因素间的交互作用

		咖啡的量	
		少	多
被试类型	晨型	90	60
	夜型	60	90

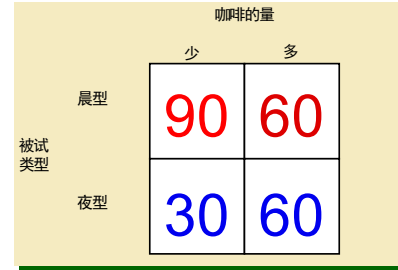
12

图示



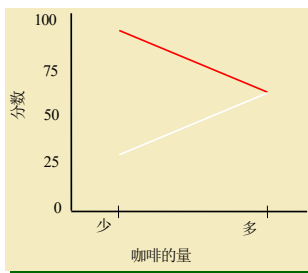
13

交互作用和一个因素的主效应



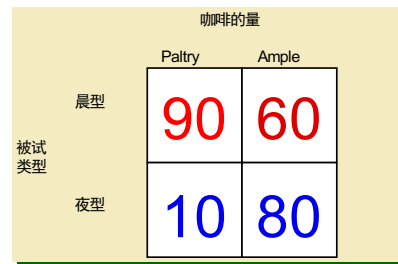
14

交互作用和一个因素的主效应



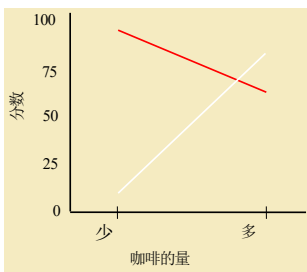
15

交互作用和两个因素的主效应



16

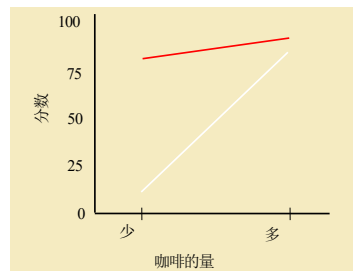
交互作用和两个因素的主效应



17

按序的交互作用

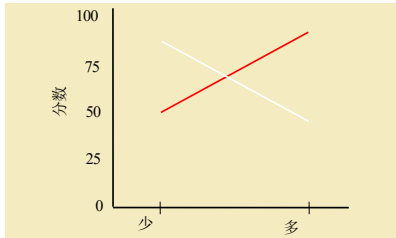
- 按序的交互作用
 - 两个自变量效应的方向一致, 但差别的大小不同



18

非按序的交互作用

- 一个自变量所引起的差别在另一个自变量的不同水平上不同
 - 有时称为**交叉式交互作用**



19

和方的两阶段分解

- 和方的第一阶段分解：
 - 总和方 = 处理间和方 + 处理内和方
- 和方的第二阶段分解：
 - 处理间和方
 - = A的主效应 + B的主效应 + AXB交互作用

20

和方的两阶段分解

- 和方的第一阶段分解：
 - 总和方 = 处理间和方 + 处理内和方
- 和方的第二阶段分解：
 - 处理间和方
 - = A的主效应 + B的主效应 + AXB交互作用

$$\sum (X_{ij} - X)^2 = \sum (X_{i.} - X)^2 + \sum (X_{.j} - X)^2 + \sum (X_{ij} - X_{ij.})^2$$

$$= \sum (X_i - X)^2 + \sum (X_j - X)^2 + Interaction + \sum (X_{ij} - X_{ij.})^2$$

21

和方的第二阶段分解

- 和方的第一阶段分解：
 - 总和方 = 处理间和方 + 处理内和方
- 和方的第二阶段分解：
 - 处理间和方
 - = A的主效应 + B的主效应 + AXB交互作用
- 三个F比率可以表达为：
 - F(A的主效应) = $\frac{A的主效应方差}{误差方差}$
 - F(B的主效应) = $\frac{B的主效应方差}{误差方差}$
 - F(AXB) = $\frac{AXB交互作用}{误差方差}$

22

方差分析表

- 与单因素 ANOVA 方差分析表类似

来源	df	SS	MS	F
A	a-1	SS _A	SS _A /df _A	MS _A /MS _E
B	b-1	SS _B	SS _B /df _B	MS _B /MS _E
AB	(a-1)(b-1)	SS _{AB}	SS _{AB} /df _{AB}	MS _{AB} /MS _E
误差	N - ab	SS _E	SS _E /df _E	
总和	N-1	SS _T	SS _T /df _T	

23

如何作假设检验

- 先考察交互作用
 - 如果交互作用显著, 主效应就难于解释
- 然后考察主效应
- 一定要作图以直观表示结果

24

交互作用

- 在因素设计的方差分析中，如果一个因素对因变量的影响因另一个因素的不同水平而不同，我们就说这两个因素有交互作用。
- 一旦交互作用显著，应先解释交互作用，然后再解释主效应。

25

一个例子

- 例：根据心理学原理，测验条件与学习条件一致时，学习效果最好。以下数据是否显示了教室与考场大小对测验成绩有无显著差异

上课条件	大考场	小考场
大教室	15	5
	20	8
	11	1
	18	1
	16	5
小教室	1	22
	4	15
	2	20
	5	17
	8	16

26

虚无假设

- 教室大小对成绩没有显著影响
 $H_0: \mu_{a1} = \mu_{a2}$; $H_1: \mu_{a1} \neq \mu_{a2}$
- 考场大小对成绩没有显著影响
 $H_0: \mu_{b1} = \mu_{b2}$; $H_1: \mu_{b1} \neq \mu_{b2}$
- 考场大小对成绩的影响不因教室大小而不同

三者均以 $\alpha = .05$ 为标准

27

自由度

- $df_a = a - 1 = 2 - 1 = 1$
- $df_b = b - 1 = 2 - 1 = 1$
- $df_{axb} = (a - 1)(b - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$
- $Df_{处理内} = N - ab = 20 - 2 \times 2 = 16$
- $F_{crit A} = F_{crit B} = F_{crit AXB} = 4.49$

28

因素设计ANOVA的符号

- a: A 因素的水平数
- b: B 因素的水平数
- A1B2: 在单位格A1B2中分数的和
- A1: 在所有A1处理中分数的和

29

大考场, 大教室		小考场, 大教室	
X	X ²	X	X ²
15	225	5	25
20	400	8	64
11	121	1	1
18	324	1	1
16	256	5	25
$\Sigma X = 80$	$\Sigma X^2 = 1326$	$\Sigma X = 20$	$\Sigma X^2 = 116$
$SS = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2 / N$		$SS = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2 / N$	
$= 1326 - 80^2 / 5 = 46$		$= 116 - 20^2 / 5 = 36$	
$A1B1 = \Sigma X = 80$		$A1B2 = \Sigma X = 20$	
大考场, 小教室		小考场, 小教室	
X	X ²	X	X ²
5	25	22	484
8	64	15	225
1	1	20	400
1	1	17	289
5	25	16	256
$\Sigma X = 20$	$\Sigma X^2 = 110$	$\Sigma X = 90$	$\Sigma X^2 = 1654$
$SS = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2 / N$		$SS = \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2 / N$	
$= 110 - 20^2 / 5 = 30$		$= 1654 - 90^2 / 5 = 34$	
$A2B1 = \Sigma X = 20$		$A2B2 = \Sigma X = 90$	

30

方差分析准备

- 计算各组的统计量, G和 $\sum X^2$
 - $A1=A1B1+A1B2=80+20=100$
 - $A2=A2B1+A2B2=20+90=110$
 - $B1=A1B1+A2B1=80+20=100$
 - $B2=A1B2+A2B2=20+90=110$
 - $G=80+20+20+90=210$
 - $\sum X^2=1326+116+110+1654=3206$

31

和方分解第一阶段

- $SS_{\text{总和}} = \sum X^2 - G^2/N = 3206 - 210^2/20 = 3206 - 2205 = 1001$
- $SS_{\text{处理间}} = \sum AB^2/n - G^2/N = 80^2/5 + 20^2/5 + 90^2/5 - 210^2/5 = 1280 + 80 + 80 + 1620 - 2205 = 855$
- $SS_{\text{处理内}} = \sum SS = 46 + 36 + 30 + 34 = 146$

32

和方分解第二阶段

- $SS_A = \sum A^2/bn - G^2/N = 100^2/10 + 110^2/10 - 2205 = 100^2/10 + 110^2/10 - 2205 = 845$
- $SS_B = \sum B^2/an - G^2/N = 100^2/10 + 110^2/10 - 2205 = 845$
- $SS_{AxB} = SS_{\text{处理间}} - SS_A - SS_B = 855 - 5 - 5 = 845$

33

一个例子

- 例: 根据心理学原理, 测验条件与学习条件一致时, 学习效果最好。以下数据是否显示了教室与考场大小对测验成绩有无显著差异

上课条件	大考场	小考场
大教室	15	5
	20	8
	11	1
	18	1
	16	5
小教室	1	22
	4	15
	2	20
	5	17
	8	16

34

示例

$$\sum (X_{ij} - X)^2 = \sum (X_{ij} - X)^2 + \sum (X_{ij} - X_{ij})^2$$

$$= \sum (X_i - X)^2 + \sum (X_j - X)^2 + Interaction + \sum (X_{ij} - X_{ij})^2$$

$$Squared = (X - \text{mean}(X(:)))^2$$

$$SSTotal = \text{sum}(Squared(:))$$

$$SS_{\text{Between Treatments}} = 5 * (\text{mean}(X(1:5,1)) - \text{mean}(X(:)))^2 + 5 * (\text{mean}(X(6:10,1)) - \text{mean}(X(:)))^2 + 5 * (\text{mean}(X(1:5,2)) - \text{mean}(X(:)))^2 + 5 * (\text{mean}(X(6:10,2)) - \text{mean}(X(:)))^2$$

$$SS_{\text{Within Treatments}} = \text{sum}((X(1:5,1) - \text{mean}(X(1:5,1))))^2 + \text{sum}((X(6:10,1) - \text{mean}(X(6:10,1))))^2 + \text{sum}((X(1:5,2) - \text{mean}(X(1:5,2))))^2 + \text{sum}((X(6:10,2) - \text{mean}(X(6:10,2))))^2$$

$$SS_A = 10 * (\text{mean}(X(:,1)) - \text{mean}(X(:)))^2 + 10 * (\text{mean}(X(:,2)) - \text{mean}(X(:)))^2$$

$$SS_B = 10 * (\text{mean}(\text{mean}(X(1:5,:))) - \text{mean}(X(:)))^2 + 10 * (\text{mean}(\text{mean}(X(6:10,:))) - \text{mean}(X(:)))^2$$

$$SS_{\text{Interaction}} = SS_{\text{Between Treatments}} - SS_A - SS_B$$

35

作方差分析表

来源	SS	df	MS	F
处理间	855	3		
A 因素	5	1	5	0.55
B 因素	5	1	5	0.55
AXB 交互作用	845	1	845	92.60
处理内	146	16	9.125	
总和	1001	19		

36

结论

- A 因素: $F(1, 16) = .55, p > .05$
 - A 因素主效应不显著
- B 因素: $F(1, 16) = .55, p > .05$
 - B 因素主效应不显著
- 交互作用: $F(1, 16) = 92.60, p < .05$
 - 考场大小对成绩的影响因教室大小而不同:
当考场大小与教室大小匹配时, 考试成绩较高
当考场大小与教室大小不匹配时, 考试成绩较低

37

因为有交互作用, 所以分析简单主效应

- 大教室时, 考场的效应
 - $SS_{\text{处理间}} = 80^2/5 + 20^2/5 - 100^2/10 = 1280 + 80 - 1000 = 360$
 - $df_{\text{处理间}} = 1$
 - $MS_{\text{处理内}} = 9.125$
 - $F = 39.45$
 - $F_{\text{crit}}(1, 16) = 4.49$, 拒绝 H_0
 - 考场越大, 成绩越好

38

因为有交互作用, 所以分析简单主效应

- 小教室时, 考场的效应
 - $SS_{\text{处理间}} = 20^2/5 + 90^2/5 - 110^2/10 = 1620 + 80 - 1210 = 490$
 - $df_{\text{处理间}} = 1$
 - $MS_{\text{处理内}} = 9.125$
 - $F = 53.70$
 - $F_{\text{crit}}(1, 16) = 4.49$, 拒绝 H_0
 - 考场越小, 成绩越好

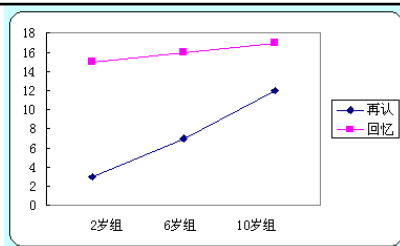
39

例: 二因素 ANOVA

- 检查记忆的方法通常有两种, 再认和回忆。一般说, 幼儿的回忆能力很差, 随着年龄增长而提高, 而再认能力在各年龄段儿童差不多, 在下列 6 种条件中各有 10 个儿童, 因变量是每个儿童正确记忆的数目。用 ANOVA 以 $\alpha = .05$ 的标准作假设检验

	2 岁	6 岁	10 岁
回忆	$\bar{X} = 3$	$\bar{X} = 7$	$\bar{X} = 12$
	$SS = 16$	$SS = 19$	$SS = 14$
再认	$\bar{X} = 15$	$\bar{X} = 16$	$\bar{X} = 17$
	$SS = 21$	$SS = 20$	$SS = 18$

40



来源	SS	df	MS	F
处理间	1553.333	5		
A 因素	1126.667	1	1126.667	563.334
B 因素	303.333	2	151.667	75.834
AxB 交互作用	123.333	2	61.667	30.834
处理内	108	54	2	
总和	1661.333	59		

41

因为交互作用显著, 所以分析简单主效应

- 在再认中, 作 3 个年龄组的单因素 ANOVA, 以 6 组的组内均方为 $MS_{\text{组内}}$
 - $SS_{\text{组间}} = 150^2/10 + 160^2/10 + 170^2/10 - 480^2/30 = 2250 + 2560 + 2890 - 7680 = 20$
 - $df_{\text{组间}} = 2, MS_{\text{组间}} = 10$
 - 注意 F 临界值为 $F(2, 54) = 3.18$
 - $MS_{\text{组内}} = 2, F = 5$, 拒绝 H_0
- 做事后检验:
 - $HSD = 3.44 * \sqrt{(2/10)} = 1.54$
 - 第 1, 3 组间有显著差异

42

分析简单主效应（续）

- 在回忆中，作3个年龄组的单因素ANOVA，以6组的组内均方为 $MS_{组内}$
 - $SS_{组内} = 30^2/10 + 70^2/10 + 120^2/10 - 220^2/30 = 90 + 490 + 1440 - 1613.333 = 406.667$
 - $df_{组内} = 2, MS_{组内} = 203.334$
 - F 临界值为 $F(2, 54) = 3.18$
 - $MS_{组内} = 2, F = 101.67$
- 做事后检验：
 - $HSD = 3.44 * \sqrt{2/10} = 1.54$
 - 各组之间均有显著差异

43

二因素ANOVA

- 比较：作两个一元方差分析 $SS_{组内} = 16 + 19 + 14 = 49; df = 30 - 3 = 27;$
 $MS_{组内} = 49/27 = 1.815;$
- F 临界值为 $F(2, 27) = 3.35$

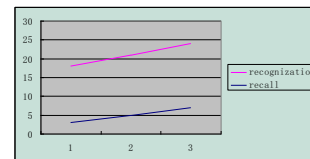
44

然后分析主效应

- 再认的效果优于回忆
- 由于年龄的主效应已经分析，在此不需要分析年龄的主效应及作事后检验

45

二因素ANOVA



- 交互作用不显著，只分析两个主效应，并做年龄的事后检验

46

一个因素设计的例子

- 自变量1：晨型和夜型
- 自变量2：喝咖啡的杯数（多，少）
- 因变量：考试分数

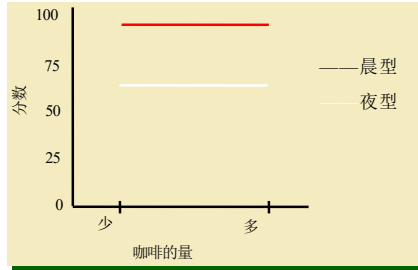
47

因素A的主效应

		少	多
被试类型	晨型	90	90
	夜型	60	60

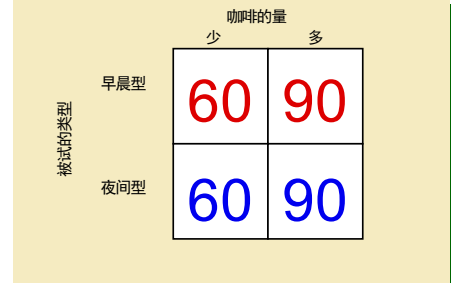
48

因素A的主效应



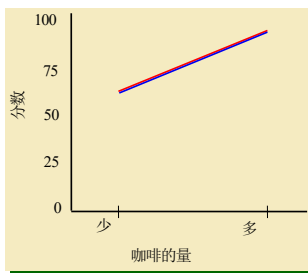
49

因素B的主效应



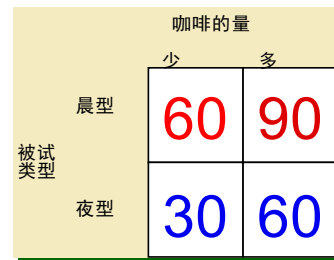
50

因素B的主效应



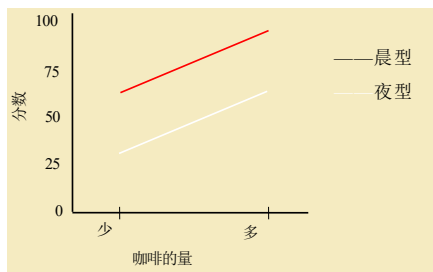
51

因素A和因素B的主效应



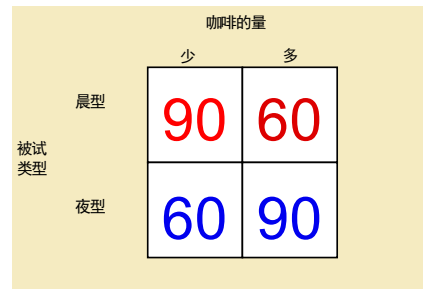
52

因素A和因素B的主效应



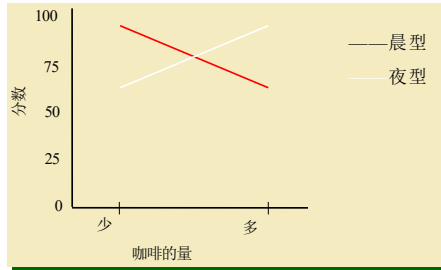
53

因素间的交互作用



54

图示



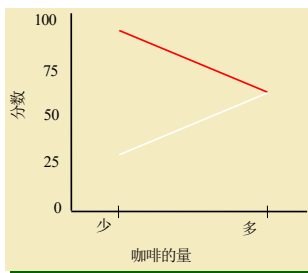
55

交互作用和一个因素的主效应

		咖啡的量	
		少	多
被试类型	晨型	90	60
	夜型	30	60

56

交互作用和一个因素的主效应



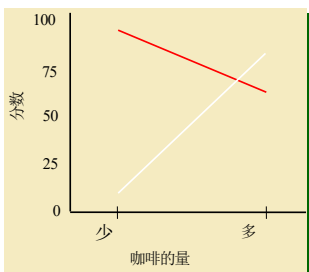
57

交互作用和两个因素的主效应

		咖啡的量	
		Paltry	Ample
被试类型	晨型	90	60
	夜型	10	80

58

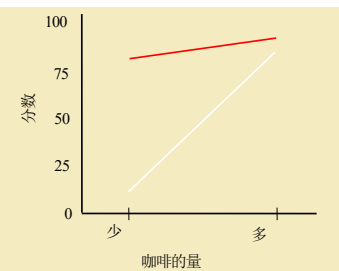
交互作用和两个因素的主效应



59

按序的交互作用

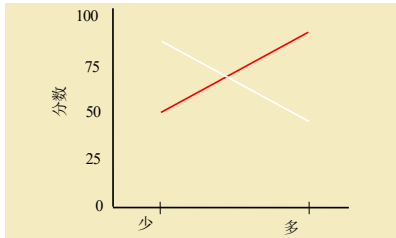
- 按序的交互作用
 - 两个自变量效应的方向一致, 但差别的大小不同



60

非按序的交互作用

- 一个自变量所引起的差别 在另一个自变量的不同水平上不同
 - 有时称为**交叉式交互作用**



61

交互作用及其解释

- 交互作用对于研究结果的解释至关重要
- 离开了对交互作用的了解，主效应的解释非常不同
- 先解释交互作用，后解释主效应
- 将几个因素的信息平均是非常危险的
 - **Simpson's paradox**
 - 平均的效应可能与各组内的情况完全不同

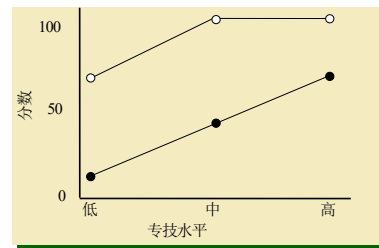
62

天花板和地板效应

- 地板效应- 被试的分数不能再低
- 天花板效应- 被试的分数不能再高
- 天花板效应和交互作用 (地板效应情况类似)
 - 一个组的被试达到天花板。而另一组尚未达到
 - 得到统计上的交互作用
 - 这种情况中，交互作用并不反映实际情况 (artifact)

63

图示



64

二因素ANOVA

- 二因素的方差分析，交互作用显著，就不需要作事后检验，而需要作简单主效应分析
- 交互作用不显著，如果主效应显著，因素有3个或3个以上水平，则需要作事后检验
- 无论交互作用是否显著，都需画图

65

作业

1. 下列数据是说明某种药物对雄性和雌性大鼠饮食行为的影响。药物的剂量分3种，无，小剂量和大剂量。因变量是24小时内摄取的食物单位。用ANOVA以 $\alpha = .05$ 的标准作假设检验，并用论文格式报告结果。

	无药物	小剂量	大剂量
雄性	1	7	3
	6	7	1
	1	11	6
	1	4	4
	1	6	4
雌性	0	0	0
	3	0	2
	7	0	0
	5	5	0
	5	0	3

66

66