心理统计

第十一讲：重复测量的方差分析 (Repeated-measures ANOVA)

严超赣

Chao-Gan Yan, Ph.D.

yancg@psych.ac.cn
http://rfmri.org/yan

Institute of Psychology, Chinese Academy of Sciences

1

1

2

复习

2

单因素ANOVA

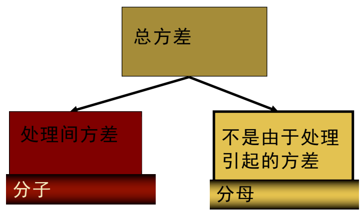
例 12.2 为了检验三种不同学习方法的效应，将学生随机分配到 3 个处理组。方法 A：让学生只读课本，不去上课；方法 B：学生上课、记笔记，但不读课本；方法 C：学生不读课本、不去上课，只看别人的笔记。经过一段时间后，对学习效果进行测量，得到结果如表 12.5。请问各方法之间是否有差异？（用 $\alpha=0.05$ 的显著性水平）

表 12.5 不同学习方法的效果

研究方法		
方法 A 只读课本	方法 B 只记笔记	方法 C 只看别人的笔记
0	4	1
1	3	2
3	6	2
1	3	0
0	4	0
$T_1=5$	$T_2=20$	$T_3=5$
$SS_1=6$	$SS_2=6$	$SS_3=4$
$n_1=5$	$n_2=5$	$n_3=5$
$\bar{X}_1=1$	$\bar{X}_2=4$	$\bar{X}_3=1$

3

方差的分解



4

方差的分解

方差(Variance)

$$s^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{df}$$

s²: 方差、均方差，也可表示为MS

$$s^2=\frac{SS}{df}$$

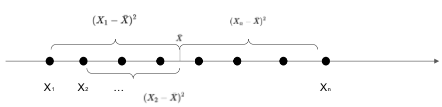
$$SS=\sum(X_i-\bar{X})^2$$

SS: 离差平方和

5

方差的分解

$$SS=\sum(X_i-\bar{X})^2$$



6

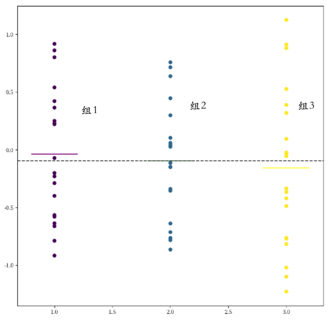
方差的分解

方差的可分解性

方差（或变异）的可分解性是指总的离差平方和可以分解为几个不同来源的平方和。

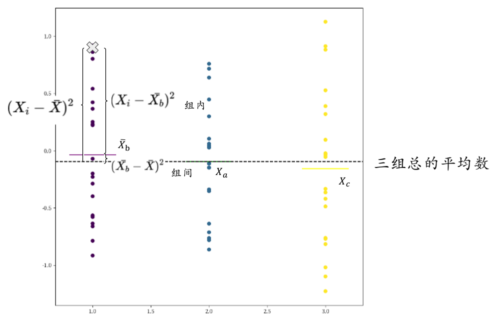
7

方差的分解



8

方差的分解



9

方差的分解

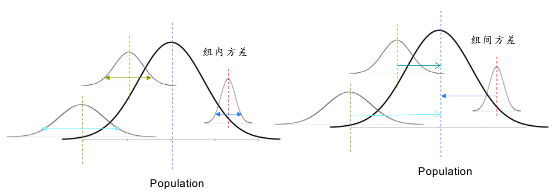
方差的可分解性

方差（或变异）的可分解性是指总的离差平方和可以分解为几个不同来源的平方和。

总平方和可以分解为组内平方和和组间平方和。

10

方差的分解



11

方差的分解

$$\sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum(X_i - \bar{X}_b)^2 + \sum(\bar{X}_b - \bar{X})^2$$

（$\bar{X}$ 总平均值，$\bar{X}_b$ 组平均值）

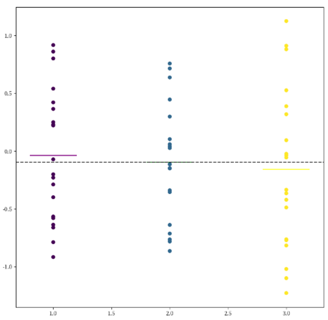
↓

$$SS_T = SS_W + SS_B$$

（SS_T 总平方和，SS_B 组间平方和，SS_W 组内平方和）

12

方差的分解



若想要对三个地区人群的主观幸福感进行比较，我们可以怎么样进行处理呢？

H_0: 三个地区人群的主观幸福感没有差异

H_1: 三个地区人群的主观幸福感存在差异

13

方差的分解

假定H_0为真，则各组之间不存在差异 $\bar{X}_b \longrightarrow \bar{X}$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2=\sum(X_i-\bar{X}_b)^2+\sum(\bar{X}_b-\bar{X})^2$$

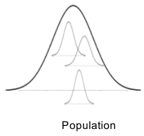
$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2 \qquad 0$$

$$SS_T = SS_W + SS_B$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$SS_T \qquad 0$$



14

方差的分解

直接使用离差平方和来进行比较会受到自由度大小的影响，故取方差(均方)来进行比较。

假定H_0为真，则各组之间不存在差异 $\bar{X}_b \longrightarrow \bar{X}$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2=\sum(X_i-\bar{X}_b)^2+\sum(\bar{X}_b-\bar{X})^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\sum(X_i-\bar{X})^2 \qquad 0$$

$$SS_T = SS_W + SS_B$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$SS_T \qquad 0$$

$$s^2=\frac{SS}{df}$$

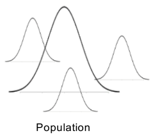
$$\downarrow$$

$$\longrightarrow \frac{MS_B}{MS_W} \longrightarrow 0$$

15

方差的分解

假定H_1为真，则各组之间存在差异



$$SS_B \gg SS_W$$

$$\downarrow$$

$$\frac{MS_B}{MS_W} \longrightarrow +\infty$$

16

方差的分解

假定H_1为真，则各组之间存在差异

$$SS_B \gg SS_W$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{MS_B}{MS_W}} \longrightarrow +\infty$$

17

单因素ANOVA

- $SS_{和} = \Sigma X^2 - (G^2/N)$
- $SS_{组内} = \Sigma SS_i$
- $SS_{组间} = \Sigma(T_i/n_i)^2 - (G^2/N)$

- $MS_{组间} = SS_{组间}/df_{组间}$
- $MS_{组内} = SS_{组内}/df_{组内}$
- $F比率 = \dfrac{处理间方差}{处理内方差} = \dfrac{MS_{组间}}{MS_{组内}}$

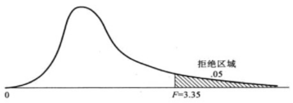
18

F比率

*F*值

$$F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

当H_0为真时，F值服从一个广为人知的概率分布。为了纪念R.A.Fisher，这个分布称为F分布。

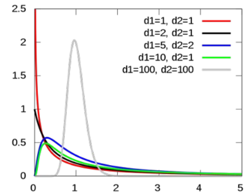


(F分布，自由度为(2,27))

19

F比率

*F*分布



Probability density function

前提条件：

1.总体正态

观测值来自正态分布的总体。

2.变异的同质性

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$

3.独立性

20

研究情境

下表为四名被试训练前和训练后1个月、2个月、3个月的单位时间内打字错误个数。用适当的统计方法检验训练后被试的打字错误有无变化。（α=0.05）

表 12.10　单位时间内打字错误随训练时间变化表

被试	处理方法			
	训练前	训练后 1 个月	训练后 2 个月	训练后 3 个月
A	8	2	1	1
B	4	1	1	0
C	6	2	0	2
D	8	3	4	1

21

重复测量的ANOVA能够处理数据的类型

- 在上例中有一个自变量 (称为组内因素): 时间.
- ANOVA 亦可用于分析同时包含组间和组内因素的混合设计

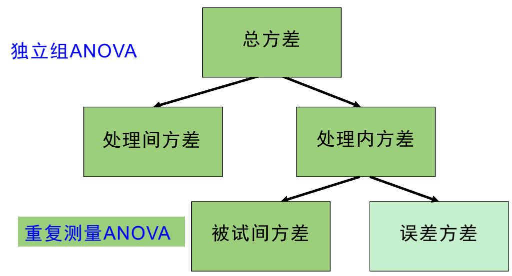
22

重复测量ANOVA的逻辑

- 和方的分解分两个阶段
  - 首先考虑方差的来源.
    - a) 处理间变异：处理效应 (处理造成的差异)
      - i. 处理效应
      - ii. 实验误差
  - 重复测量设计在每一种处理条件用同样的个体，所以处理间变异不包含个体差异。
    - b) 处理内变异
      - i. 被试间方差
      - ii. 实验误差

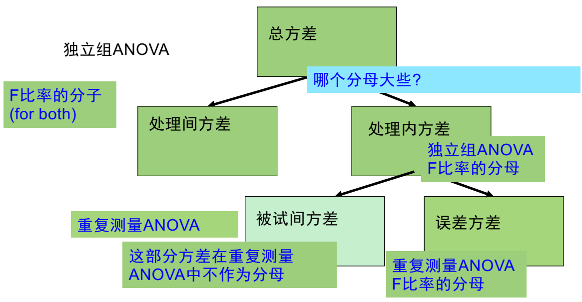
23

ANOVA间关系的比较



24

ANOVA间关系的比较



25

和方的分割

$$SS_{总和} = SS_{组间} + SS_{组内}$$

$$= SS_{组间} + SS_{被试间} + SS_{误差}$$

$$\sum (X_i - X)^2 = \sum (X_T - X)^2 + \sum (X_i - X_T)^2$$

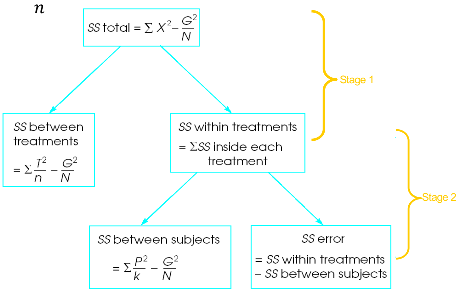
$$= \sum (X_T - X)^2 + \sum (X_P - X)^2 + Error$$

26

和方的分割

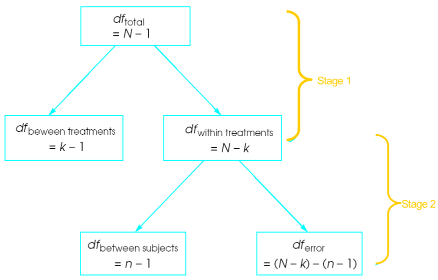
$$SS = \sum (X - X)^2$$

$$SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$$



27

自由度的分割



28

重复测量ANOVA的逻辑

$$F = \frac{处理间变异}{实验误差} = \frac{MS_{组间}}{MS_{误差}}$$

29

重复测量ANOVA的专用符号

- K = 处理条件(或组)的数目
- n = 每一个组的数目(如果它们相等)
- N = Σn_i = 总的观察数目
- $T_i = \Sigma X_{ij}$
- G = ΣT_i 总的和
- SS_i = 每一个组的和方的和 = $\Sigma(X_{ij} - {}_i)^2$
- **P = 每一个被试的观察数目**

30

示例

如下表所示，被试A、B、C、D进行问题解决的练习，对被试分别测量了练习1次，2次和3次后反应正确的次数。试分析练习次数对问题解决成绩有无显著影响。（用α =0.05显著性水平）

表 12.7　不同练习次数的问题解决成绩表

被试	练习次数		
	1 次	2 次	3 次
A	3	3	6
B	2	2	2
C	1	1	4
D	2	4	6

31

示例

	练习次数		
被试	1次	2次	3次
A	3	3	6
B	2	2	2
C	1	1	4
D	2	4	6

32

和方的分割

$$SS_{总和} = SS_{组间} + SS_{组内}$$

$$= SS_{组间} + SS_{被试间} + SS_{误差}$$

$$\sum (X_i - X)^2 = \sum (X_T - X)^2 + \sum (X_i - X_T)^2$$

$$= \sum (X_T - X)^2 + \sum (X_P - X)^2 + Error$$

33

示例

$$\sum (X_i - X)^2 = \sum (X_T - X)^2 + \sum (X_i - X_T)^2$$

$$= \sum (X_T - X)^2 + \sum (X_P - X)^2 + Error$$

```
Squared=(X-mean(X(:))).^2
SSTotal=sum(Squared(:))

SSBetweenTreatments = 4*(mean(X(:,1))-mean(X(:))).^2 + 4*(mean(X(:,2))-mean(X(:))).^2 + 4*(mean(X(:,3))-mean(X(:))).^2

SSWithinTreatments = sum((X(:,1)-mean(X(:,1))).^2) + sum((X(:,2)-mean(X(:,2))).^2) + sum((X(:,3)-mean(X(:,3))).^2)

SSBetweenSubjects = 3*(mean(X(1,:))-mean(X(:))).^2 + 3*(mean(X(2,:))-mean(X(:))).^2 + 3*(mean(X(3,:))-mean(X(:))).^2 + 3*(mean(X(4,:))-mean(X(:))).^2

SSError = SSWithinTreatments - SSBetweenSubjects
```

34

	练习次数			
被试	1 次	2 次	3 次	p
A	3	3	6	12
B	2	2	2	6
C	1	1	4	6
D	2	4	6	12
	$T_1 = 8$	$T_2 = 20$	$T_3 = 18$	
	$SS_1 = 2$	$SS_2 = 5$	$SS_3 = 11$	

$\Sigma X^2 = 140$；$G = 36$

$K = 3$， $n=4$， $N=12$

35

处理间变异与被试间变异

- 处理间变异是列之间的变异性，被试间变异是行之间的变异性，二者可类比
- 计算方法
  - $SS_{处理间} = \Sigma(T^2/n_i) - G^2/N$
  - $SS_{被试间} = \Sigma(P^2/k) - G^2/N$

36

和方的分解步骤

- 第1阶段：$SS_{和} = SS_{组间} + SS_{组内}$
  - $SS_{和}=\Sigma X^2 - (G^2/N)=140- (36^2/12)=140-108 = 32$
  - 需要将其分解为组间变异和组内变异.
  - $SS_{组间} = \Sigma(T^2/n_i) - G^2/N = 8^2/4 + 20^2/4 + 18^2/4–108 = 14$
  - $SS_{组内} = \Sigma SS$每一个 处理内部 $= \Sigma SS_i = 2 + 5 + 11$
  $= 18$
- 第2阶段：$SS_{组内} = SS_{被试间} + SS_{误差}$
  - $SS_{被试间} = \Sigma(P^2/k) - G^2/N= 12^2/3 + 6^2/3 + 6^2/3 + 12^2/3–108 = 12$
  - $SS_{误差} = SS_{组内}-SS_{被试间} = 18-12=6$

37

自由度

- 共有5个自由度, 2个计算均方时要用到
  - 1） 总的 df = N-1
  - 2） <u>组间方差df = k-1</u>
  - 3） 组内方差df = N-k
  - 4） 被试间方差df = n-1
  - 5） <u>误差方差df = （N-k） -（n-1）= N-k-n+1</u>

38

均方和F值的计算

- $MS_{组间}= SS_{组间}/df_{组间}$
  --> 上例中 = 14/2 = 7
- $MS_{误差} = SS_{误差}/df_{误差}$
  --> 上例中 = 6/6 = 1
- **F比率 = $\dfrac{\text{处理间方差}}{\text{误差方差}}$**

39

方差分析表

表 12.9 例 12.3 的方差分析表

来源	SS	df	MS	F	η_p^2
组间	14	2	7	7	0.70
组内	18	9			
被试间	12	3			
误差	6	6	1		
总和	32	11			

40

用重复测量的方差分析进行假设检验

- H0：μ 1=μ 2=μ 3， α = .05, 查 F表 确定 F_{crit} 对假设作出结论
- $df_{组间}$ = 分子的df
  $df_{误差}$ = 分母的df (误差)
  --> 上例中:
  - $df_{误差} = 6$; $df_{组间} = 2$
  - $F_{crit} = 5.14$
  - **$F_{obs} = 6$**
  - 假设中
  F比率的观测值6大于 $F_{.05}$，所以拒绝 H_0

41

报告结果

- **各练习次数的均值和标准差列在表1中。重复测量的方差分析发现练习次数有显著的效应，F(2, 6) = 6，p < 0.05.**

42

事后检验（Post hoc tests）

- ANOVA 的结果是检验H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$,这是一个两点 (拒绝/不拒绝) 决策. 并未提供哪个备择假设得到支持. 也就是说, 只知道一些组与其它组不同, 但并知道差别在哪些组之间.
- 所以从ANOVA得到显著差异的结果 (拒绝H_0)后,一定要做作一些事后检验. 事后检验使我们能够比较各组, 发现差异产生在什么地方.
- 事后检验就是比较每一个处理组与另一个处理组, 一次比较两个. 这称为成对比较.

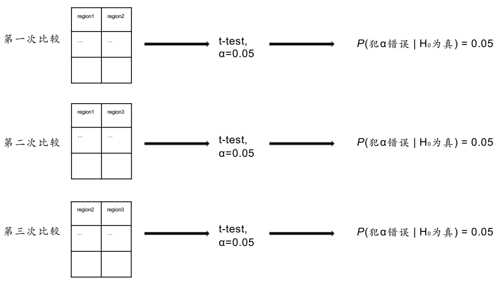
43

族系（familywise） 误差

- 在上例中, 可以比较 m_1 与 m_2, m_1与 m_3, 以及 m_2与 m_3. 这样的做法有没有问题？
- 每一个比较 都是一个单独的假设检验, 每一个都有犯I类错误的风险. 所以,比较对数越多, 作结论的风险越大。即容易发现实际不存在的差异。 这称为实验导致的（experimentwise）alpha 水平 或族系（familywise） 误差
- $\alpha_{EW} = 1 - (1 - \alpha)^c$ c = 比较对数
- 对于上述例子, 如果选择 α = 0.05 作3 对比较
- $\alpha_{EW} = 1 - (1 - \alpha)^c = 1 - (.95)^3 = 1 - .857 = .143$
- I类错误的机会增加到14.3%而不再是5%，多数事后检验设计中都控制了实验导致误差.

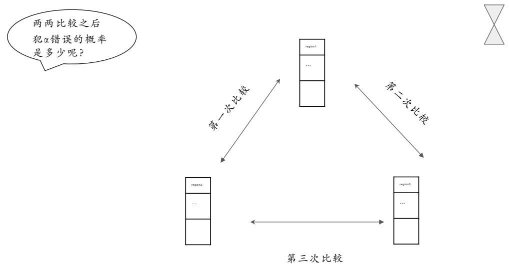
44

族系（familywise） 误差



45

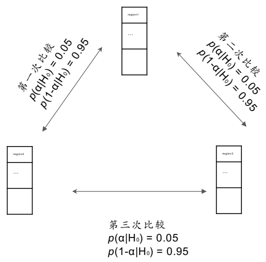
族系（familywise） 误差



46

族系（familywise） 误差

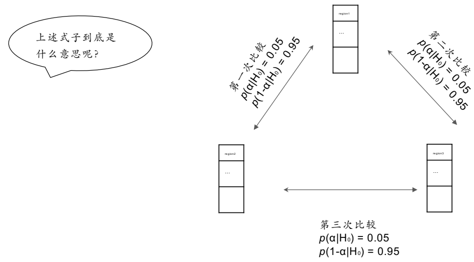
p(犯错误的概率) = $1 - (1- 0.05)^3 \approx 0.143$



47

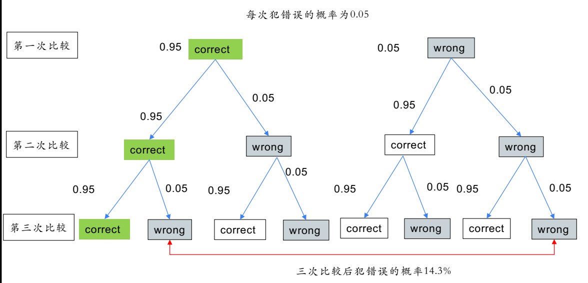
族系（familywise） 误差

p(犯错误的概率) = $1 - (1- 0.05)^3 \approx 0.143$



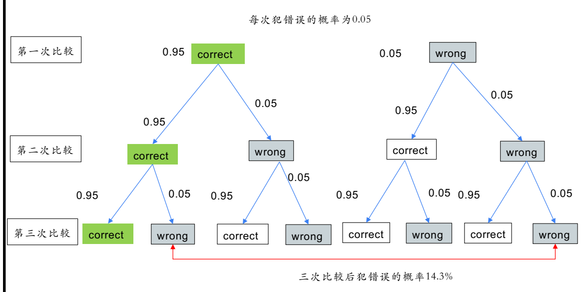
48

族系（familywise） 误差



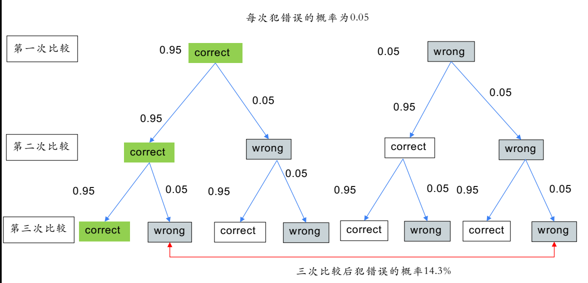
49

族系（familywise） 误差



50

族系（familywise） 误差



51

Tukey's HSD 检验

- 可以计算出单一的值确定处理均值间的最小差异，考查此差异在统计上是否显著.
- HSD = q * sqrt（$MS_{组内}$/n）
- q 值 可以从表中查出(附表5). 需要用到K和$df_{组内}$, 以及α_{EW}
- 用误差的和方，自由度， 均方代替原来分母项的组内和方，自由度， 均方
- HSD = q * sqrt（$MS_{误差}$/n）
- q 值可以从表中查出(附表5). 需要用到K和$df_{误差}$, 以及α_{EW}

52

事后检验

- HSD = q * sqrt（$MS_{误差}$/n）
  =4.34 * sqrt（1/4）=2.17
  X1=2，X2=2.5，X3=4.5
  1 vs. 2 ：0.5< HSD
  1 vs. 3: 2.5>HSD,均值1,3之间存在显著差异
  2 vs. 3: 2.0 < HSD.
- 有时， 事后检验差异没有一对是显著的，但方差分析表明三个平均值之间存在显著差异。

53

研究示例

下表为四名被试训练前和训练后1个月、2个月、3个月的单位时间内打字错误个数。用适当的统计方法检验训练后被试的打字错误有无变化。（ α=0.05 ）

表 12. 10　单位时间内打字错误随训练时间变化表

被试	处理方法			
	训练前	训练后 1 个月	训练后 2 个月	训练后 3 个月
A	8	2	1	1
B	4	1	1	0
C	6	2	0	2
D	8	3	4	1

54

	处理				
被试	训练前	训练后 1周	训练后 1月	训练后 6月	p
A	8	2	1	1	12
B	4	1	1	0	6
C	6	2	0	2	10
D	8	3	4	1	16
	T1=26	T2=8	T3=6	T4=4	
	SS1=11	SS2=2	SS3=9	SS4=2	

$n=4$ $k=4$ $N=16$ $G=44$ $\Sigma X^2=222$

55

- $SS_{总}= \Sigma X^2 - (G^2/N)=222-44^2/16=222-121=101$
- $SS_{处理间} = \Sigma(T^2/n_i) - G^2/N =26^2/4+8^2/4+6^2/4+4^2/4-121 = 169+16+9+4-121=77$
- $SS_{处理内} = \Sigma SS_i =11+2+9+2=24$
- $SS_{被试间} = \Sigma(P^2/k) - G^2/N= 12^2/4+6^2/4+10^2/4+16^2/4-121 = 36+9+25+64-121=13$
- $SS_{误差}= SS_{处理内}- SS_{被试间} = 24-13 = 11$

56

表 12.12　例 12.4 的方差分析表

来源	SS	df	MS	F	η_p^2
处理间	77	3	25.667	21.00	0.875
处理内	24	12			
被试间	13	3			
误差	11	9	1.222		
总和	101	15			

57

重复测量的方差分析的统计前提

1）每个处理条件内的观察都是独立的
2）每个处理条件内的总体分布是正态分布
3）每个处理条件间的方差同质

58

重复测量设计的优势

1）用较少被试，经济
2）把个体差异项消除
- 当个体差异大时，这个优势更明显

如：　处理效应 = 10个方差单位
个体差异 = 1000个方差单位
误差 = 1个方差单位
F独立 = （10+1000）/（1+1000）=1.01
F重复 = 11/1=11

59

方差分析的效应大小

独立样本方差分析

$$\eta^2 = \frac{SS_{组间}}{SS_{组间} + SS_{组内}}$$

$\eta^2 = r^2$

r^2 的大小	效应的评估
$0.01 < r^2 < 0.09$	小的效应
$0.09 < r^2 < 0.25$	中等效应
$r^2 > 0.25$	大的效应

60

方差分析的效应大小

重复测量方差分析

$$F = \frac{处理间变异}{实验误差} = \frac{MS_{组间}}{MS_{误差}}$$

$$\eta^2 = \frac{SS_{组间}}{SS_{组间} + SS_{误差}}$$

Cohen's f $$f = \sqrt{\frac{F_{effect} \times df_{effect}}{df_{error}}}$$

$$f = \sqrt{\frac{\eta^2}{1-\eta^2}}$$

61

方差分析的统计效力

		ACTUAL SITUATION	
		NO EFFECT, H_0 TRUE	EFFECT EXISTS, H_0 FALSE
EXPERIMENTER'S DECISION	Reject H_0	Type I error α	Dc $1-\beta$ ct
	Retain H_0	Decision correct	Type II β

62

方差分析的统计效力

表 12.13 ANOVA 的效应和效力换算表

表 12.13.1 三组被试

效应大小 / 效力 / 每组人数	0.10	0.25	0.40
10	0.07	0.20	0.45
20	0.09	0.38	0.78
30	0.12	0.55	0.93
40	0.15	0.68	0.98
50	0.18	0.79	0.99
100	0.32	0.98	1.0

表 12.14 用 ANOVA 做 $\alpha=0.05$ 的假设检验达到 80%的统计效力所需的被试

效应大小 / 被试数 / 组数	0.10	0.25	0.40
3 组	322	52	21
4 组	274	45	18
5 组	240	39	16

G*Power: https://www.psychologie.hhu.de/arbeitsgruppen/allgemeine-psychologie-und-arbeitspsychologie/gpower

63

作业

1. 以下是三种不同处理的实验比较数据：

	处理	
A	B	C
0	1	2
2	5	5
1	2	6
5	4	9
2	8	8

a. 如果实验采用独立测量设计，在.05的alpha水平上，研究者能否得出结论，不同处理有显著差异？

b. 如果实验采用重复测量设计，在.05的alpha水平上，研究者能否得出结论，不同处理有显著差异？

c. 解释为什么a、b两种情况下的结果有差异。

64

64

作业

2. 以下ANOVA表中的数据来自于比较四种处理条件的重复测量数据。样本n=10，请将下表填完整。

来源	SS	df	MS	
处理间	____	___	20	F=
处理内	____	___		
被试内	36	___		
误差	____	___	____	
总的	150	___		

65

65

作业

3. 一位教育心理学家研究小学生的动机。选取了5个学生，从他们4年级追踪随访到6年级。每年作一次动机的问卷。数据列于表中。问在3个年级的水平间，有无动机的显著变化。用 .05的显著性水平作假设检验，并用论文格式报告结果。

学生	4年级	5年级	6年级
A	4	3	1
B	8	6	4
C	5	3	3
D	7	4	2
E	6	4	0

66

66